PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA - LA MANCHA

EXTRAORDINARIA – 2021

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $e\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + 3 \cdot I = A$.

----

a)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 3F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 + F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$A \cdot X + 3 \cdot I = A; \;\; A \cdot X = A - 3I; \;\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A - 3I);$$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (A - 3I) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A - 3I)}.$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (A - 3I) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 11 & -3 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) $a)$ Discute el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=2 \\ x+z=a \\ ax+2y+z=3 \end{array}\right\}$ en función del parámetro $a \in R$.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=2+a^2-2-a=0;\ \ a^2-a=0;\ \ a(a-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=0, a_2=1.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=4+1-2-3=0 \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 2 \\ x + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2^2-2} = \frac{4+6-4-4}{2} = \frac{2}{2} = 1. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2+3+4-4-3-2}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4+8-4-6}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\underline{Solución: x = 1, y = 0, z = 1}.$$

****

3º) $a)$ Calcula razonadamente la siguiente integral: $I_1 = \int x \cdot \cos(3x) \cdot dx$.

$b)$ Calcula razonadamente la siguiente integral $I_2 = \int \frac{1}{2x^2+1} \cdot dx$.

$a)$

$$I_1 = \int x \cdot \cos(3x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ cos\ (3x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{3} \cdot sen\ (3x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{3} \cdot sen\ (3x) - \int \frac{1}{3} \cdot sen\ (3x) \cdot dx = \frac{x}{3} \cdot sen\ (3x) - \frac{1}{3} \cdot \int sen\ (3x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{3} \cdot sen\ (3x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot co\ (3x) + C.$$

$$\underline{I_1 = \int x \cdot cos\ (3x) \cdot dx = \frac{1}{9} \cdot [3x \cdot sen\ (3x) + cos\ (3x)] + C.}$$

$b)$

$$I_2 = \int \frac{1}{2x^2+1} \cdot dx = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2} \cdot x\right)^2 + 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2} \cdot x = t \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot arc\ tg\ t + C.$$

$$\underline{I_2 = \int \frac{1}{2x^2+1} \cdot dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot arc\ tg\ \left(\sqrt{2} \cdot x\right) + C.}$$

****

4º) Sean los planos $\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + az = 0$.

a) Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

----

a)

Dos planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales.

Los vectores normales de los planos π_1 y π_2 son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (a, 1, 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2, -1, a)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_1} = (a, 1, 2) \cdot (2, -1, a) = 2a - 1 + 2a = 0;\ \ 4a = 1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{4}}.$$

b)

Para $a = 1$ el plano π_1 resulta $\pi_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(2, 0, 1)$ y al plano $\pi_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0$:

$$d(P, \pi_1) = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2 + 0 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\underline{d(P, \pi_1) = \frac{\sqrt{6}}{6}\ unidades.}$$

****

5º) $a)$ Calcula razonadamente: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

$b)$ Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x & si \;\; x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & si \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ x & si \;\; x > 2 \end{cases}$, estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

$a)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \frac{1-1}{e^{1-1}-1} = \frac{0}{e^0-1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{e^{x-1}} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{1-1}} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = 1}.$$

$b)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$ donde la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función $f(x)$ es continua en $R - \{1\}$, excepto para $x = -1 \; y \; x = 2$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \; x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1 = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \; es \; discontinua \; para \; x = 0}.$$

$$\underline{La \; discontinuidad \; en \; x = 0 \; es \; inevitable \; de \; salto \; finito.}$$

$$Para \; x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1 = f(2) \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} x = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \; es \; discontinua \; para \; x = 2}.$$

$$\underline{La \; discontinuidad \; en \; x = 2 \; es \; inevitable \; de \; salto \; finito.}$$

****

6º) Sea la función $f(x)=\frac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

a) Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$.

----

a)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{(4x+2)(3x^2+3)-(2x^2+2x-2)\cdot 6x}{(3x^2+3)^2}=\frac{12x^3+12x+6x^2+6-12x^3-12x^2+12x}{9\cdot(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{-6x^2+24x+6}{9\cdot(x^2+1)^2}=\frac{6\cdot(-x^2+4x+1)}{9\cdot(x^2+1)^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2}{3}\cdot\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}=0;\;\; -x^2+4x+1=0;\;\; x^2-4x-1=0;$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}\Rightarrow x_1=2-\sqrt{5}, x_1=2+\sqrt{5}.$$

Teniendo en cuanta que $(x^2+1)^3\neq 0, \forall x\in R$, la función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, por lo cual las raíces que anulan su primera derivada dividen a la recta real en los intervalos $\left(-\infty, 2-\sqrt{5}\right), \left(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right)\; y\; \left(2+\sqrt{5}, +\infty\right)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo y por facilidad, $x=0\in\left(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right)$:

$f'(0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1^2}>0\Rightarrow Creciente$. De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento y, como consecuencia, las abscisas de los puntos críticos, que son las siguientes:

$$Máximo\ relativo\ para\ x=2-\sqrt{5}\ y\ mínimo\ relativo\ para\ x=2+\sqrt{5}.$$

$$f(2-\sqrt{5})=\frac{2\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^2+2\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)-2}{3\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^2+3}=\frac{2\cdot\left(4-4\sqrt{5}+5\right)+4-2\sqrt{5}-2}{3\cdot\left(9-4\sqrt{5}\right)+3}=\frac{18-8\sqrt{5}-2\sqrt{5}+2}{27-12\sqrt{5}+3}=$$

$$=\frac{20-10\sqrt{5}}{30-12\sqrt{5}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{2-\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)}{25-20}=\frac{10+4\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{3}=-\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Mín.\rightarrow A\left(2-\sqrt{5}, \frac{-\sqrt{5}}{3}\right)}.$$

$$f(2+\sqrt{5}) = \frac{2\cdot(2+\sqrt{5})^2+2\cdot(2+\sqrt{5})-2}{3\cdot(2+\sqrt{5})^2+3} = \frac{2\cdot(4+4\sqrt{5}+5)+4+2\sqrt{5}-2}{3\cdot(9+4\sqrt{5})+3} = \frac{18+8\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2}{27+12\sqrt{5}+3} =$$

$$= \frac{20+10\sqrt{5}}{30+12\sqrt{5}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{2+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{(2+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{25-20} = \frac{10-4\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Máx. \rightarrow B\left(2+\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)}.$$

$b)$

Para $x = 1$ es:

$f(1) = \frac{2\cdot1^2+2\cdot1-2}{3\cdot1^2+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, por lo cual el punto de tangencia es $P\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$m = f'(1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{-1+4+1}{(1^2+1)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4} = \frac{2}{3}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(1, \frac{1}{3}\right)$ con $m = \frac{2}{3}$ es:

$$y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot(x-1);\;\; 3y - 1 = 2x - 2.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 2x - 3y - 1 = 0}.$$

****

7º) a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$, con $a, b \in R$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por $P(1,1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

b) Sea la función $f(x) = x \cdot sen\, x - \cos x$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

----

a)

Por contener $f(x)$ al punto $P(1,1)$ es $f(1) = 1$.

$f(1) = 1 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 - 1 = 1;\ \ a + b = 1.$ (1)

Por tener un punto de inflexión en $P(1,1)$ es $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1.$ $f''(x) = 6ax + 2b.$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 0;\ \ 6a + 2b = 0;\ \ 3a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a - b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = -1;\ \ \underline{a = -\tfrac{1}{2}}. \quad -\tfrac{1}{2} + b = 1 \Rightarrow \underline{b = \tfrac{3}{2}}.$$

b)

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Debe tenerse en cuanta que los ángulos se miden en radianes.

La función $f(x) = x \cdot sen\, x - \cos x$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por ser producto y suma de funciones continuas y derivables, por lo cual le es aplicable el teorema de Rolle en cualquier intervalo finito que se considere.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 \cdot sen\,(-1) - \cos\,(-1) = sen\,(1) - \cos\,(1) \\ f(1) = 1 \cdot sen\,(1) - \cos\,(1) = sen\,(1) - \cos\,(1) \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) = f(1).$$

$f'(x) = 1 \cdot sen\, x + x \cdot \cos x + sen\, x = 2 \cdot sen\, x + x \cdot \cos x.$

Según el teorema de Rolle, $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$; para este valor c la función $f(x)$ tiene un extremo relativo.

$f''(x) = 2 \cdot \cos x + 1 \cdot \cos x - x \cdot sen\, x = 3 \cdot cos\, x - x \cdot sen\, x.$

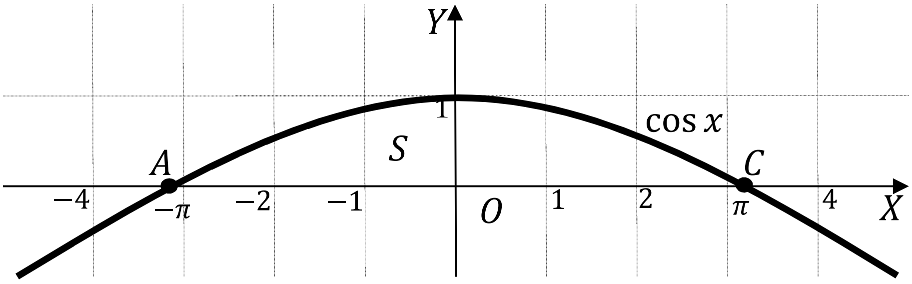
Se demuestra a continuación que no se anula la segunda derivada par $x = c$.

$f'(c) = 0 \Rightarrow 2 \cdot sen\ c + c \cdot \cos c = 0;\ \ sen\ c = -\frac{1}{2} \cdot c \cdot \cos c.$

$f''(c) = 3 \cdot cos\ c - c \cdot sen\ c = 3 \cdot cos\ c - c \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot c \cdot \cos c\right) =$

$= 3 \cdot cos\ c + \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \cos c = \cos c \cdot \left(3 + \frac{c^2}{2}\right).$

$3 + \frac{c^2}{2} > 0, \forall c \in R$. Por otra parte: $\cos c > 0$, como se observa en la figura adjunta, por ser $-1 < c < 1$, por lo cual: $f''(x) > 0$.



Lo anterior demuestra lo pedido, que:

$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ un\ extremo\ relativo\ (mínimo)\ en\ [-1, 1].}$

****

8º) a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona una paciente al azar:

a_1) ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

a_2) Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

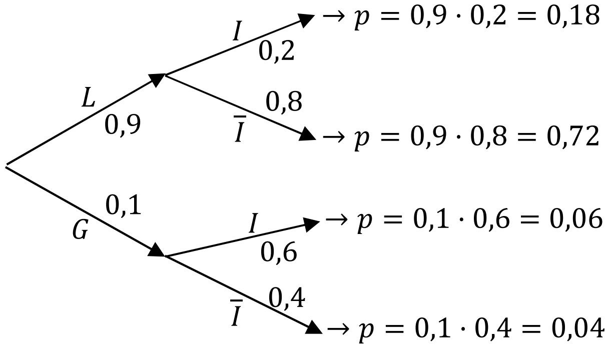
b) En un momento dedo llegan 8 pacientes a urgencias.

b_1) ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

----

a)



a_1)

$$P = P(I) = P(L \cap I) + P(G \cap I) = P(L) \cdot P(I/L) + P(G) \cdot P(I/G) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}18 + 0{,}06 = \underline{0{,}24}.$$

a_2)

$$P = P(L/I) = \frac{P(L \cap I)}{P(I)} = \frac{P(L) \cdot P(I/L)}{P(I)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}2}{0{,}24} = \frac{0{,}18}{0{,}24} = \underline{0{,}75}.$$

b)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 8;\ \ p(L) = p = 0{,}9;\ \ q = 0{,}1.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

b_1) $\quad P = P(4) = \binom{8}{4} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^4 = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} \cdot 0{,}09^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0{,}09^4 =$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0{,}09^4 = 70 \cdot 0{,}09^4 = \underline{0{,}0046}.$$

$b_2)$

El suceso contrario a que “como mucho 7 pacientes sean clasificados leves” es que “los ocho pacientes sean clasificados leves”, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - P(8) = 1 - \binom{8}{8} \cdot 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^0 = 1 - 1 \cdot 0{,}4305 \cdot 1 = 1 - 0{,}4305 =$$

$$= \underline{0{,}5695}.$$

****